

# Systems of congruences

EG Solve:  $7x + 3y \equiv 10 \pmod{16}$   
 $2x + 5y \equiv 9 \pmod{16}$

① solve the equations  $7x + 3y = 10$   
 $2x + 5y = 9$

$$\rightarrow x = \frac{23}{29} \quad y = \frac{43}{29}$$

② compute  $29^{-1} \pmod{16}$

$$(-3)^{-1} \equiv 5$$

clever:  $3 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{16}$   
 $\rightarrow 3^{-1} \equiv -5$

③ reinterpret  $x, y \pmod{16}$

$$x \equiv 29^{-1} \cdot 23 \equiv 5 \cdot 7 \equiv 3 \pmod{16}$$

$$y \equiv 29^{-1} \cdot 43 \equiv 5 \cdot (-5) \equiv 7 \pmod{16}$$

optional ④ check:  $7 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \stackrel{?}{\equiv} \checkmark 10 \pmod{16}$   
 $2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \stackrel{?}{\equiv} \checkmark 9 \pmod{16}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$5 \cdot 10 - 3 \cdot 9$

$$= \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 23 \\ 43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad - bc}_{\text{determinant}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$